Descomposición Automática de Dominio en la Resolución Paralela del Problema Meteorológico del Frente Frío.

Rodrigo Ramos*+, rramos@cnc.una.py
Benjamín Barán*, bbaran@cnc.una.py
Eugenius Kaszkurewicz+ eugenius@coep.ufrj.br

*Centro Nacional de Computación, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay.
+Laboratorio de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD).
Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil.

Palabras clave: sistemas distribuidos, paralelismo, partición de sistemas, predicción meteorológica, modelaje atmosférico.

Resumen

El presente trabajo presenta los resultados computacionales de simulaciones de un problema relacionado con la evolución de un Frente Frío, con énfasis en la descomposición del dominio para la paralelización del método numérico empleado. Los estudios experimentales comprueban la calidad del método de descomposición propuesto, verificada con tiempos de procesamiento reducidos y buenos valores de aceleración.

1. Introducción.

La predicción de fenómenos meteorológicos es en la actualidad uno de los campos de la ciencia que posee mayor influencia en la calidad de vida de la humanidad. En el contexto de la elaboración de los pronósticos, se distinguen las siguientes etapas [1], ilustradas en la figura 1:

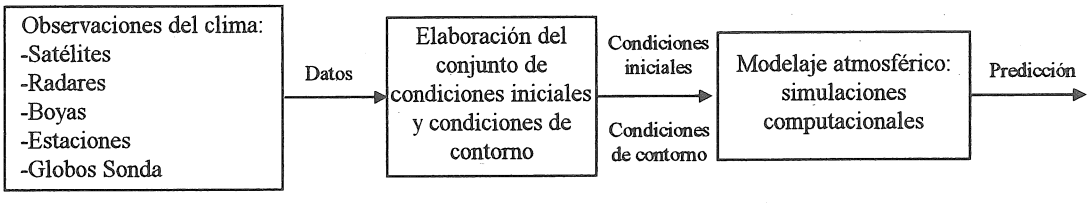

Figura 1: Proceso de Predicción Meteorológica

- Adquisición de datos: informaciones son obtenidas en las estaciones meteorológicas y dispositivos de medición.

- Pre-procesamiento de datos: las informaciones disponibles son analizadas y utilizadas en la obtención de un conjunto de condiciones iniciales para la implementación y resolución de los modelos matemáticos.
- Resolución numérica de los modelos matemáticos: la simulación computacional del comportamiento físico de la atmósfera proporciona las predicciones deseadas.

Históricamente, la predicción de los fenómenos meteorológicos se ha constituido en una de las principales aplicaciones de la resolución de modelos hidrodinámicos en computadoras de gran porte; tales modelos se encuentran constituidos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDE), que son resueltas usando métodos numéricos adecuados [2]. La complejidad y el costo computacional de la resolución de estos modelos depende de varios factores, como el grado de refinamiento utilizado en el dominio de resolución, lo que determina el número de ecuaciones a ser analizadas, considerando un esquema de solución en diferencias finitas. Es evidente que la calidad de la predicción obtenida será mejor cuanto mayores sean los refinamientos de la cuadrícula. Así, una vez implementada la discretización de las PDEs, para un elevado grado de refinamiento podría surgir la necesidad de resolver sistemas con un elevado número de ecuaciones (del orden de 10^6). En estas condiciones, el procesamiento paralelo es una opción válida en la búsqueda de tiempos de procesamientos viables, dado que este el factor es vital para que el pronóstico sea completado en tiempo hábil [3].

Para lograr un adecuado mapeamiento del problema a la arquitectura paralela, es necesario descomponer el dominio de resolución del problema en subdominios menores [4], los cuales pueden ser asignados a los distintos procesadores del sistema distribuido para su resolución paralela. Esta descomposición está condicionada por dos factores:

a) La capacidad de procesamiento relativo de cada máquina del sistema distribuido, factor que determina las dimensiones de los subproblemas asignados a cada procesador;
b) El grado de acoplamiento que puedan tener los subproblemas entre sí, lo que determina la dependencia entre las variables y por consiguiente, influye en la convergencia del algoritmo.

El presente trabajo propone la descomposición del dominio por medio del método propuesto en [5], que se basa en el agrupamientos de incógnitas (puntos) alrededor de puntos especiales llamados semillas. El problema del área de predicción meteorológica seleccionado como ejemplo es el llamado problema del Frente Frío. En la sección 2 será presentado el problema, con la descripción del modelo matemático y las consideraciones básicas sobre el mismo. El método de resolución computacional del modelo se presenta en la sección 3 con una breve introducción al método de descomposición propuesto, mientras que en la sección

4 son mostrados los resultados experimentales considerando un problema ejemplo. Finalmente, las conclusiones son presentadas en la sección 5.

2. El problema del Frente Frío.

El problema a ser tratado en el contexto del presente trabajo consiste en el análisis del desplazamiento de una capa de aire frío polar sobre la superficie del globo terrestre [6]. La capa de aire frío se encuentra separada de la capa de aire superior (más caliente) por una interface llamada *frente*. La intersección del *frente* con la superficie terrestre es usualmente una línea ondulada llamada Frente Frío, o alternativamente, Frente Cálido, en función del sentido del desplazamiento de la misma. El *frente* posee una pequeña inclinación en dirección sur de usualmente una pequeña fracción de grado, de modo tal que en el polo la altura de la capa de aire frío es de varios kilómetros. La figura 2 presenta un gráfico ilustrativo.

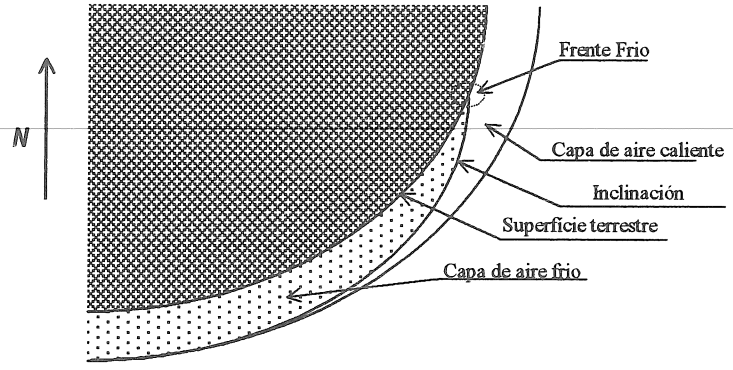

Figura 2: Problema del Frente Frio en el plano

En la aproximación más simple, la capa polar se encuentra en equilibrio, y son asumidas las siguientes consideraciones [6]:

- Los cálculos son hechos considerando una pequeña porción de la superficie del globo terrestre, de modo tal que la curvatura de la misma y las consiguientes variaciones de las fuerzas de Coriolis puedan ser despreciadas. Así, el parámetro de Coriolis será igual a $f = 2\omega \sin\varphi$, donde φ es la latitud.
- El aire caliente en la parte superior posee una velocidad constante en la dirección oeste → este relativa a la capa de aire frío, de modo tal que el frente constituye una discontinuidad de la componente oeste → este del viento, así como de la temperatura, como ya fuera expuesto con anterioridad.
- Cada capa posee densidad constante.
- Las aceleraciones verticales son despreciadas, de modo tal que la presión en cada punto está dada por la fórmula hidrostática elemental.

- La compresibilidad es despreciada, ya que la velocidad del viento es mucho menor que la velocidad del sonido.
- La capa de aire caliente no se encuentra influenciada por modificaciones en la capa de aire frío.
- El flujo es considerado periódico en longitud con un período tal que las magnitudes son idénticas en puntos correspondientes de los límites este y oeste. En el límite sur se asume un *rigid wall*, o sea, la capa de aire frío posee velocidad cero y altura constante.

Con la utilización de estas hipótesis en la elaboración del modelo matemático del Frente Frío, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales [6]:

$$\frac{Du}{Dt} + g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)\frac{\partial h}{\partial X} = fv \qquad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)\frac{\partial h}{\partial Y} = f\left(\frac{\rho'}{\rho}\overline{u}' - u\right) \qquad (2)$$

$$\frac{Dh}{Dt} = 0 \qquad (3)$$

donde el operador D/Dt está dado por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial X} + v\frac{\partial}{\partial Y}$$

X e Y son las coordenadas cartesianas en la dirección este y norte, respectivamente, $u = u(X,Y,t)$ y $v = v(X,Y,t)$ son las componentes, en las direcciones X e Y, de la velocidad del viento, $h = h(X,Y,t)$ es la altura de la capa de aire frío. Las otras cantidades son constantes: ρ / ρ', es la relación de densidades de las capas de aire caliente y de aire frío, $\overline{u}'$ es la velocidad del aire (constante), en sentido este $\rightarrow$ oeste, de la capa de aire caliente, y g es la aceleración de la gravedad.

El dominio de resolución del sistema de ecuaciones se muestra en la figura 3. Sea C la curva donde el *frente* intercepta a la superficie (en este caso, el plano X-Y) en el instante de tiempo t, o sea, $h(X,Y,t) = 0$. Los puntos sobre la curva C son identificados vectorialmente por $\xi_l(t) \in \Re^2$, con la correspondiente velocidad del aire $v_l(t) = \frac{d\xi_l}{dt}$ (4)

Las condiciones efectivas de contorno para la curva C son obtenidas a partir de las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{dv_l}{dt} = \psi \qquad \text{con } \psi = -g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)\nabla h + \gamma v_l + K \qquad (5)$$

donde $\gamma = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix}$, $K = f\frac{\rho'}{\rho}\overline{u'}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y ∇h debe ser calculado en ξ_l.

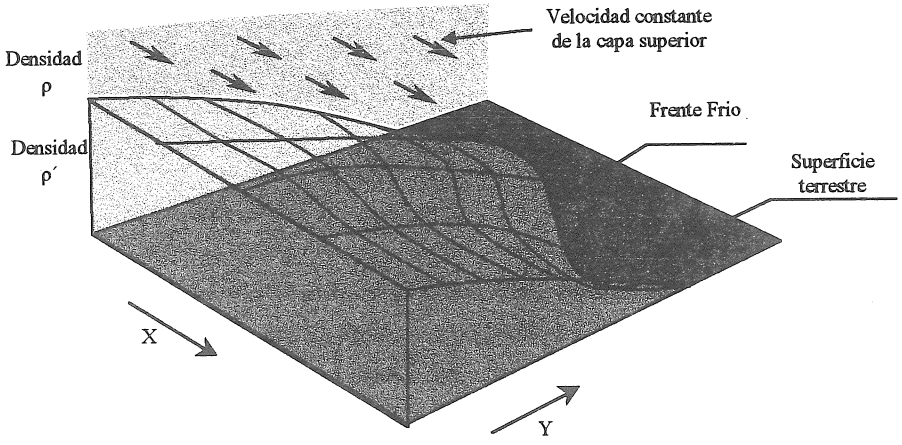

Figura 3: Dominio de resolución

La curva C puede ser ajustada por algún tipo de curva conocida, en función de las características del frente. En los estudios experimentales del presente trabajo fue realizada una aproximación de la curva C por medio de una senoidal, con un período igual a la dimensión (este – oeste) del dominio de resolución.

3. Resolución numérica del problema.

El sistema de ecuaciones (1) a (3), así como las condiciones de contorno en la curva C fueron discretizados convenientemente por aproximación a diferencias finitas, para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, el cual a su vez fue resuelto usando una variante del método de Newton desacoplado por bloques [7].

3.1. Discretización de las ecuaciones.

Aplicando el esquema de aproximaciones del tipo diferencias divididas finitas en las ecuaciones (4) y (5), se obtienen las siguientes expresiones discretizadas [6]:

$$\xi_l^{n+1} - \xi_l^n = \tfrac{1}{2}\left(v_l^{n+1} + v_l^n\right)\Delta t \qquad (6)$$

$$v_l^{n+1} - v_l^n = \tfrac{1}{2}\left(\psi_l^{n+1} + \psi_l^n\right)\Delta t \qquad (7)$$

estando ψ definida en (5). Así, el sistema lineal obtenido es resuelto y la solución consiste en las velocidades del aire en cada punto de la curva C.

En la discretización de las ecuaciones (1) a (3), se aplica un esquema de aproximaciones del tipo *centered difference* en dirección de X y en la dirección de Y, y un esquema de *backward difference* en la dirección de *t*. Así, la molécula computacional aplicada es la ilustrada en la figura 4:

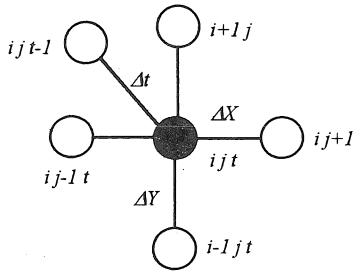

Figura 4: molécula computacional

Las ecuaciones discretizadas, para cada punto de la cuadrícula, quedan como sigue:

Para la ecuación (1):

$$\phi_{ij}^{I}(\cdot)=\frac{u_{ij}^{k}-u_{ij}^{k-1}}{\Delta t}+u_{ij}^{k}\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x}+v_{ij}^{k}\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y}+g\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)\frac{\left(h_{ij+1}^{k}-h_{ij-1}^{k}\right)}{2\Delta x}-fv_{ij}^{k}=0 \qquad (8)$$

Para la ecuación (2):

$$\phi_{ij}^{II}(\cdot)=\frac{v_{ij}^{k}-v_{ij}^{k-1}}{\Delta t}+u_{ij}^{k}\frac{v_{ij+1}^{k}-v_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x}+v_{ij}^{k}\frac{v_{i+1j}^{k}-v_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y}+g\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)\frac{\left(h_{i+1j}^{k}-h_{i-1j}^{k}\right)}{2\Delta y}-f\frac{\rho'}{\rho}\overline{u'}+fu_{ij}^{k}=0 \qquad (9)$$

Para la ecuación (3):

$$\phi_{ij}^{III}(\cdot)=\frac{h_{ij}^{k}-h_{ij}^{k-1}}{\Delta t}+u_{ij}^{k}\frac{h_{ij+1}^{k}-h_{ij-1}^{k-1}}{2\Delta x}+v_{ij}^{k}\frac{h_{i+1j}^{k}-h_{i-1j}^{k-1}}{2\Delta y}=0 \qquad (10)$$

Usando una notación compacta, el sistema discretizado para un paso Δt puede ser expresado en la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=0, \qquad \mathbf{F}:\Re^{3n}\mapsto\Re^{3n} \qquad (11)$$

donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\left[\phi_{11}^{I}(\mathbf{x})\ \cdots\ \phi_{rs}^{I}(\mathbf{x})\ \ \phi_{11}^{II}(\mathbf{x})\ \cdots\ \phi_{rs}^{II}(\mathbf{x})\ \ \phi_{11}^{III}(\mathbf{x})\ \cdots\ \phi_{rs}^{III}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}=\left[u_{11}^{k}\ \cdots\ u_{rs}^{k}\ \ v_{11}^{k}\ \cdots\ v_{rs}^{k}\ \ h_{11}^{k}\ \cdots\ h_{rs}^{k}\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{x}\in\Re^{3n}$$

siendo n el número de puntos en la cuadrícula a ser resueltos, y r,s los subíndices del último punto considerado, dentro del dominio.

3.2. Resolución del sistema de diferencias finitas.

Uno de los métodos más efectivos y populares en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es el método de Newton – Raphson [8]. El método tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^{k}-\mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{k}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{k}\right),$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$ es el Jacobiano de la función $\mathbf{F}$, calculado en el punto $\mathbf{x}^k$. Evidentemente, el mayor esfuerzo computacional será realizado en la "inversión" del Jacobiano (de dimensión $3n$). Así, para una gran cantidad de puntos, el problema requerirá una cantidad de trabajo computacional de un orden tal que podría comprometer seriamente la posibilidad de obtener los pronósticos en tiempo hábil (antes de que ocurra lo pronosticado).

En este contexto, la aplicación del método de Newton – Raphson desacoplado por bloques se constituye en una opción adecuada para aprovechar las ventajas del procesamiento paralelo. Este método iterativo consiste en:

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k - \mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{F}_i(\mathbf{x}^k) \quad , \quad \mathbf{x}^{k+1} = \left[\mathbf{x}_1^{k+1} \quad \mathbf{x}_2^{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_p^{k+1}\right]^T \quad \mathbf{x}_i^{k+1} \in \Re^{n_i}, \sum_1^p n_i = n \quad i \in \{1,2,\ldots p\} \tag{12}$$

donde p corresponde al número de bloques en que el sistema será descompuesto y $k+1$ es la nueva iteración a calcular. Los vectores $\mathbf{x}_i^{k+1}$ representan a las magnitudes a ser calculadas para un conjunto dado de puntos del dominio. Cada uno de estos vectores es calculado separadamente, eliminando así una gran cantidad de trabajo computacional, ya que solo es necesario realizar la inversión de las matrices diagonales. Esta aproximación es posible porque para el problema en estudio, el bloque diagonal es, en norma, mucho mayor que la suma de las normas de los bloques no diagonales (en aproximadamente 350 veces).

3.4. Descomposición del dominio

Para que el método de resolución expuesto en la sección anterior sea eficiente en términos de convergencia y tiempos de procesamiento, debe verificarse que las incógnitas se encuentren débilmente acopladas, es decir, los bloques no diagonales del Jacobiano deben ser en norma, mucho menores que los bloques diagonales. En el presente trabajo se presenta la implementación del método propuesto por Barán et al. [5] como una opción válida para obtener áreas débilmente agrupadas en la cuadrícula.

Este método de partición se basa en la identificación de grupos de puntos fuertemente acoplados, para poder así descomponer el problema global en subproblemas que aglomeren a cada uno de los centros de agrupamiento de incógnitas.

El principio básico consiste en la formación de áreas de la cuadrícula a partir de un conjunto dado de puntos semillas. Las áreas se van formando por la asociación de puntos a cada una de esas semillas, usando un criterio basado en un "ranking" de pesos previamente asignados a cada uno de los puntos de la cuadrícula. En cada paso del proceso, el punto a ser asociado a una área dada en formación es aquel entre

los adyacentes a la misma que posee el peso mayor, y que aún se encuentre disponible, es decir, aún no asociado a otro subproblema.

El ranking de pesos w_i de los puntos se obtiene con la siguiente fórmula:

$$w_i = \sum_{p \in \Omega_i} B_{ip}^{B_{ip}/M}$$

donde :

Ω_i: Conjunto de todos los puntos adyacentes al punto i.

B_{ip}: Valor de acoplamiento entre un punto i y otro punto p del dominio.

M : Valor medio del acoplamiento entre dos puntos del dominio.

La forma de evaluar el acoplamiento entre puntos de la cuadrícula es uno de los temas a ser definidos con mayor cuidado, ya que el método se basa en la búsqueda de centros de acoplamiento. En la presente adaptación, el acoplamiento será definido como

$$B_{p_1p_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \phi^{I}_{p_1p_2}}{\partial u_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{II}_{p_1p_2}}{\partial u_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{III}_{p_1p_2}}{\partial u_{p_2}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \phi^{I}_{p_1p_2}}{\partial v_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{II}_{p_1p_2}}{\partial v_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{III}_{p_1p_2}}{\partial v_{p_2}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \phi^{I}_{p_1p_2}}{\partial h_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{II}_{p_1p_2}}{\partial h_{p_2}} + \frac{\partial \phi^{III}_{p_1p_2}}{\partial h_{p_2}}\right)$$

evaluado para las condiciones iniciales.

La selección de las semillas se realiza con base en la determinación de un conjunto de puntos candidatos a semillas. Este conjunto contiene a todos los puntos con un valor de peso w_i superior a un valor determinado por el método, conocido como *vlim*.

A partir del conjunto así determinado, e independientemente de los otros puntos del conjunto, se agrupan los puntos mas pesados del entorno, buscando así identificar a los puntos que se rodean con acoplamientos más fuertes. Se agrupan alrededor de cada candidato una cantidad limitada de *ngrup* puntos.

Una vez hecho esto para todos los puntos del conjunto de candidatos, se calcula la sumatoria de pesos agrupados, seleccionando como semillas aquellas con mayor sumatoria. Para evitar la selección de puntos muy próximos como semillas simultáneas, se establece que la distancia mínima entre semillas será de $nvec \times \Delta X$ en la dirección X y de $nvec \times \Delta Y$ en la dirección Y.

Una vez determinadas tantas semillas como procesadores serán utilizados, el proceso de partición es iniciado. Para esto, cada semilla selecciona a la incógnita mas "pesada" entre los puntos adyacentes, y la incluye en la sub-área en formación. El proceso continúa hasta que no existan puntos disponibles para ser

anexados. En el caso de existir "peleas" entre sub-áreas en formación por algún punto en particular, gana el subconjunto que posea el acoplamiento de mayor valor con el punto en cuestión.

Es importante establecer aquí que la calidad de la descomposición depende en gran medida de los diversos parámetros que el método de descomposición utiliza. Mas aún, estos parámetros determinan el costo computacional del proceso, factor primordial para determinar la conveniencia de implementar particiones más refinadas.

4. Experimentos Computacionales

La configuración de la implementación utilizada en los estudios experimentales del presente trabajo es del tipo *Master – Slave*, con comunicación de resultados realizada de forma síncrona. El cálculo de los puntos de la curva C es realizado secuencialmente en el procesador *Master*. Los procesos *slaves* son inicializados por el *Master* en cada uno de los procesadores que hacen parte de la máquina paralela. Para cada uno de los procesos paralelos, los valores de los puntos contiguos y no incluidos en su subdominio son considerados constantes en la iteración, siendo actualizados para la siguiente iteración.

4.1. Plataforma computacional.

La plataforma computacional utilizada en los estudios experimentales consistió en una IBM SP-2, con 4 procesadores RS/6000 (tecnología POWER2), funcionando en las instalaciones del Núcleo de Atendimiento en Computación de Alto Desempeño (NACAD - UFRJ). La codificación de la implementación del método de Newton-Raphson fue realizada en ANSI C, con rutinas de paralelización PVM; la migración de los códigos a otras plataformas paralelas como por ejemplo, el MPI, está siendo encarada en la actualidad. El método de descomposición fue implementado utilizando el lenguaje MATLAB, funcionando en un ambiente Windows; para esto, se utilizó una PC con procesador Pentium II de 400 MHz, con 64 MB de memoria RAM.

4.2. Casos de estudio

Con la finalidad de seleccionar un caso de estudio que ofreciera las características más generales posibles, fueron estudiados los diversos parámetros y la configuración inicial del dominio de resolución, resultando la siguiente configuración como la más adecuada:

- Dimensiones de la cuadrícula: fue seleccionado un dominio de orden regional, con una superficie aproximada de 10.000 km^2; la curva C fue considerada como una senoidal con periodo T=100 km. y amplitud igual a 16 km.

- Componentes u y v de la velocidad del aire: fue considerada una situación inicial de reposo, con $u=v=0$ para todos los puntos del dominio.
- Altura de la capa de aire frío: en el límite sur se considera un "rigid wall" con una altura uniforme de 10 km. Para los valores iniciales de la altura en los puntos internos, se consideró una variación parabólica.

4.3. Descomposición del dominio

Como ya fue expuesto en la sección anterior, el método de descomposición automática de dominio seleccionado fue el método de la semilla [5,8]. En la figura 5 se muestra, para el ejemplo descrito en 4.2, la descomposición para la resolución en 3 procesadores, para un dominio con 387 puntos. Los valores de los parámetros de descomposición utilizados por el método fueron los siguientes:

- vlim = 50% del número total de puntos n.
- ngrup = 25% de n.
- nvec = 13% de n.

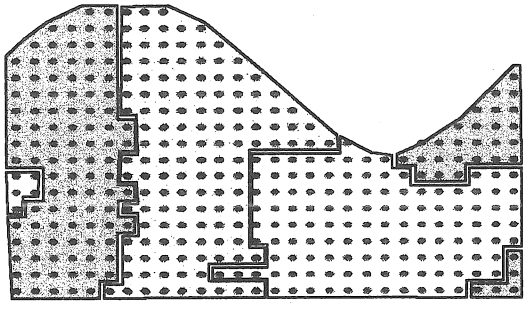

Figura 5 : Descomposición del domínio para una cuadrícula de 387 puntos.

La figura 5 muestra la descomposición propuesta por el método automático que, como se puede ver, no resulta nada intuitiva, ni geográficamente "natural", aunque respeta algunos aspectos intuitivos, como la aglomeración de incógnitas relacionadas entre sí, en un mismo procesador.

4.4. Tiempos de resolución y aceleración

En la figura 6 se muestra la curva de aceleración obtenida con la implementación de la descomposición propuesta, para 2, 3 y 4 procesadores, para la cuadrícula con 387 puntos de la sección anterior.

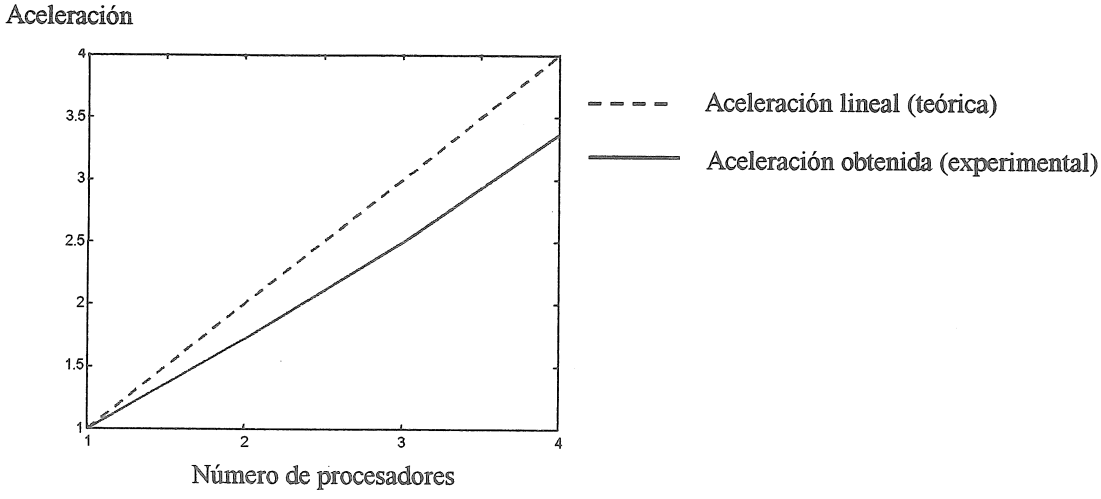

Figura 6 : Curva de aceleración

Puede ser observado en la figura 6 que la paralelización es muy eficiente, con valores próximos de la linealidad. En la tabla 1, se comparan los tiempos de resolución paralelos utilizados con una descomposición de dominio heurística* con los tiempos correspondientes para la descomposición automática usando el método propuesto. Puede apreciarse que, para el último caso, los tiempos de resolución en promedio son 32 % menores que para el caso de la descomposición heurística.

Nº de proc.	Tiempos de Procesamiento (s)		Mejora (%)
	Descomposición heurística	Descomposición automática	
2	275,57	182,75	33,7
3	81,75	55,62	31,9
4	48,43	30,68	36,6

Tabla 1: Tiempos de Procesamiento

5. Conclusiones.

En la resolución de problemas de predicción de fenómenos meteorológicos, el tiempo de cómputo es un factor sumamente importante por las grandes dimensiones del problema. Por esto, es importante disponer de herramientas matemáticas y computacionales que trabajen en forma eficiente con la gran dimensión de los

* Basada en una división del Jacobiano en bloques correspondientes a cada una de las incógnitas u, v y h.

sistemas de ecuaciones implicados. El procesamiento paralelo es una opción importante en este sentido, y su aplicación crece en forma constante, en la medida que más procesadores están al alcance de los responsables por estos cálculos.

Uno de los factores primordiales que determinan el comportamiento de los métodos numéricos paralelos aplicados a la resolución de estos problemas es la descomposición del dominio de resolución. El presente trabajo propuso para este efecto el método de la semilla, aplicado en la resolución del problema del Frente Frío. Los resultados experimentales muestran que el método de descomposición es eficiente, arrojando buenos valores de aceleración para problemas de grandes dimensiones, proponiendo particiones que no pueden ser obtenidas en forma intuitiva, o por simples consideraciones geográficas.

Referencias.

[1] Christidis Z., Edwards J. y Snook J., "Regional Weather Forecasting in the 1996 Summer Olyimpic Games Using an IBM SP", IBM Corporation Research, http://www.research.ibm.bom/OlympicsWeather/SP_AMS/SP_systems.hyml, 1996.

[2] Richtmyer R.D. y Morton K.W., *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2da. Edición, Krieger Publishing Company, 1995.

[3] Mass. C. F. y Ying-Hwa K., "A Mesoscale Model Intercomparison", *Bulletin of the American Meteorololgical Society*, 79, No. 2, pp. 265 – 283, 1998.

[4] Rodriguez B. et al., "Parallelizing Operational Weather Prediction Models for Portable and Fast Execution", *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 1996.

[5] Barán B., Benítez D. y Ramos R., "Partición de Sistemas de Ecuaciones para su Resolución Distribuida", XXII Conferencia Latinoamericana de Informática CLEI Panel 96, Bogotá, Colombia, 1996.

[6] Stoker J.J., "Dinamical theory for treating the motion of cold and warm fronts in the atmosphere", Report IMM 200, Courant Inst. Math. Sc., New York University, 1953.

[7] Stott B. y Alsaç O., "Fast Decoupled Load Flow". *IEEE trans. On Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-93, pp. 859-869, 1974.

[8] Barán B. y Benítez D., "Heuristic Partitioning Algorithm with Partial Overlapping for a System of Equations Distributed Solution", Focus Symposium: "Architecture, Tools and Algorithm for Networks, Parallel and Distributed Systems", Systemics, Cybernetics and Informatics – SCI'98, Orlando – Florida, Estados Unidos, 1998.